

Colles de Maths - semaine 15 - MP*2

Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Soit $\alpha > 1$. Montrer qu'il existe une constante C et une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{C}{k^\alpha}.$$

En considérant les événements $\{\{p \text{ divise } X\}, p \text{ premier}\}$, montrer que

$$\zeta(\alpha) = \prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}.$$

Exercice 2 Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont donnés par des variables aléatoires i.i.d. admettant une variance σ^2 . Déterminer l'espérance de $\det X$ ainsi que sa variance dans le cas où les coefficients sont centrés.

Exercice 3 En utilisant des variables de Poisson, déterminer un équivalent de

1. $\sum_{k=0}^{\lfloor an \rfloor} \frac{n^k}{k!}$ lorsque $a > 1$;
2. $\sum_{k=\lfloor an \rfloor}^{\infty} \frac{n^k}{k!}$ lorsque $a < 1$.

Exercice 4 Soit une famille $(X_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ une famille de variables de Bernoulli de paramètre p_n mutuellement indépendantes. On considère le graphe aléatoire de sommets $\llbracket 1, n \rrbracket$, et d'arêtes $\{\{i, j\}, i < j \text{ et } X_{i,j} = 1\}$. Soit X_n le nombre de points isolés dans le graphe.

Déterminer la limite quand $n \rightarrow \infty$ de $\mathbb{P}(X_n \geq 1)$ dans les deux cas suivants :

1. $np_n - \ln n \rightarrow +\infty$;
2. $np_n \rightarrow a > 0$.

Exercice 5 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ des variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_\infty)]$;
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X_n \leq x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_\infty \leq x)$;
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X_n = x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_\infty = x)$.

Exercice 6 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $1 \leq p < q$. Montrer que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iv) et (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v), où

- (i) Convergence L^q : $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^q] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
- (ii) Convergence L^p : $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|^p] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
- (iii) Convergence presque sûre : $\mathbb{P}(X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X_\infty) = 1$;
- (iv) Convergence en probabilité : $\forall \delta > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X_\infty| > \delta) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
- (v) Convergence en loi : $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(X_\infty)]$.

On pourra justifier que dans (iii), l'ensemble en argument est bien mesurable.

Exercice 7 On reprend les notations de l'exercice précédent. Supposons que (X_n) converge en probabilité vers X_∞ .

1. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer qu'il existe une extractrice φ telle que $(X_{\varphi(n)})$ converge presque sûrement vers X_∞ .
2. En déduire une preuve du fait que la convergence en probabilité implique la convergence en loi.

Exercice 8 On note X_n la variable aléatoire donnée par le nombre de cycles dans la décomposition en cycles à supports disjoints d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (on compte aussi les points fixes) tirée uniformément au hasard.

1. Montrer que la fonction génératrice G_n de X_n vérifie

$$\forall x \in]0, 1[, \frac{G'_n(x)}{G_n(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k}.$$

2. En déduire l'espérance et la variance de X_n .
3. Montrer que $\frac{X_n}{\ln n}$ converge en probabilité vers 1, c'est-à-dire

$$\forall \delta > 0, \mathbb{P} \left(\left| \frac{X_n}{\ln n} - 1 \right| > \delta \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$